

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

УДК 517.944
© 1995

Т. О. БАРАБАШ, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ГРАНИЧНЫЙ РЕЖИМ, ГАРАНТИРУЮЩИЙ СТАБИЛИЗАЦИЮ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком НАН Украины Ю. Л. Далецким)

Изучаются решения $u(t, x)$ краевой задачи

$$\partial_t u(t, x) = -\partial_x^3 u(t, x), (t, x) \in E_{++}^2 = \{(t, x) : t > 0, x > 0\}, \quad (1)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^1 = \{x : x > 0\}, \quad (2)$$

$$B(\partial_x)u|_{x=0} = g(t), t \in E_+^1 = \{t : t > 0\}. \quad (3)$$

Здесь $B(\partial_x) = \sum_{k=0}^r b_k \partial_x^k$, где $b_k, k = 0, \dots, r$, —

вещественные постоянные. Находится условие на многочлен $B(\lambda)$, гарантирующее стабилизацию ограниченных решений $u(t, x)$ задачи (1)–(3), построенных по произвольным стабилизирующим граничным функциям $g(t)$. Переходим к его формулировке.

Кубическое уравнение

$$\lambda^3 + p = 0,$$

где $p = |p|e^{i\varphi}$ — комплексный параметр, имеет три решения

$$\lambda_j(p) = |p|^{1/3} \exp\{i(\varphi + \pi)/3 + 2\pi(j-1)/3\}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Нас интересует та из функций $\lambda_j(p)$, которая при всех p из правой полуплоскости комплекс-

ной p -плоскости имеет отрицательную вещественную часть. Из формулы (4) непосредственно следует, что этим свойством обладает только функция $\lambda_2(p) = |p|^{1/3} \exp\{i(\pi + \varphi/3)\}$, значения которой (при $|\varphi| < \pi/2$) лежат в секторе $\arg \lambda_2(p) \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$. Определим теперь функцию $F(p) =$

$$= B(\lambda_2(p)) = \sum_{k=0}^r b_k (\lambda_2(p))^k.$$

Условие α). Все нули функции $F(p)$ лежат в левой полуплоскости комплексной p -плоскости.

Условие α) означает, что нули многочлена $B(z)$ лежат в секторе $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ комплексной z -плоскости.

Центральным результатом работы является

Теорема 1. Для стабилизации ограниченных решений $u(t, x)$ задачи (1)–(3), построенных по произвольным стабилизирующимся граничным функциям $g(t)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие α).

Сформулированная задача была поставлена А. Н. Тихоновым [1]. Он ее решил для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной координаты. В этом же случае, но для модельного параболического по Петровскому

уравнения произвольного порядка, это сделал Д. В. Прока [2]. Для модельных параболических уравнений и систем уравнений с любым числом пространственных координат задача рассматривалась в работах Я. С. Кушицкого и С. Д. Эйделямана [3—6]. Подробное изложение развитой ими методики содержится в [7, гл. 7].

Наш интерес к уравнению (3) вызван его «физичностью», это линейаризованное уравнение Кортевега — де Фриза (см., например, [8], гл. 1), и тем, что граничные задачи для таких уравнений (корректных по Петровскому) принадлежат к числу мало исследованных.

При доказательстве теоремы 1 мы следовали схеме, изложенной в [7]. Однако уже на первом шагу исследования у нас, вместо обычной экспоненты, появилась функция Эйри и свойства этой функции существенно определили и те модификации в методах, которые нам потребовались.

1. Переходим к описанию наших рассуждений и полученной дополнительной информации о решениях задачи (1) — (3). Здесь и дальше через c и C будем обозначать (вообще говоря, различные) положительные постоянные. Ограниченные решения $u(t, x)$ задачи (1) — (3) представимы формулой

$$u(t, x) = \int_0^t G(t - \tau, x) g(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $G(t, x)$ — ядро Пуассона этой задачи. Функция $G(t, x)$ определяется равенством

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp\{pt + \lambda_2(p)x\} \frac{dp}{B(\lambda_2(p))}, \quad (6)$$

γ — достаточно большая положительная постоянная.

В наших дальнейших построениях особую роль играет ядро Пуассона задачи Дирихле

$$G_0(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp\{pt + \lambda_2(p)x\} dp. \quad (7)$$

Справедливо такое важное утверждение.

Теорема 2. Ядро Пуассона $G_0(t, x)$ задачи Дирихле для уравнения (1) определяется формулой

$$G_0(t, x) = 3 \frac{x}{(3t)^{4/3}} Ai(x(3t)^{-1/3}), \quad (8)$$

где $Ai(z)$ — функция Эйри (см. [9], с. 265, формула 10.4.2).

В дальнейшем используются свойства этой функции, в частности, что она экспоненциально убывает при $x \rightarrow +\infty$.

Переходим к изучению свойств ядер Пуассона $G(t, x)$. Из этих свойств почти непосредственно следует, что условие α) гарантирует стабилизацию ограниченных решений $u(t, x)$ изучаемой задачи, построенных по произвольным стабилизирующимся граничным функциям $g(t)$. Свойства $G(t, x)$ описаны в следующем предложении.

Теорема 3. Пусть выполнено α). Тогда ядро Пуассона $G(t, x)$ задачи (1) — (3) обладает свойствами:

1) при $t \in (0; 1]$ справедлива оценка

$$|G(t, x)| \leq Ct^{(r-1)/3} \exp\{-c(xt^{-1/3})^{3/2}\};$$

2) имеет место представление

$$G(t, x) = B(0)^{-1}G_0(t, x) + G_1(t, x),$$

где для функции $G(t, x)$ при $t \geq 1$ справедлива оценка

$$|G_1(t, x)| \leq Ct^{-4/3} \exp\{-c(|x|t^{-1/3})^{3/2}\};$$

3) интеграл $\int_0^\infty |G(t, x)| dt$ равномерно по x , $x \in (0; \infty)$, ограничен.

При доказательстве теоремы 3 использовалась методика [7].

Однако все этапы доказательства потребовали внесения необходимых корректив в рассуждения и вычисления.

Переходим к изложению теоремы о стабилизации.

Определение. Непрерывная на $[0; \infty)$ функция называется стабилизирующейся, если существует конечный предел g^0 функции $g(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Предполагается выполненным условие α). Тогда решение $u(t, x)$ задачи (1) — (3), представимое формулой (4) и построенное по любой стабилизирующейся граничной функции, стабилизируется и справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = g^0 \int_0^\infty G(t, x) dt.$$

Теорема 4 непосредственно следует из теоремы 3 и утверждения из [1, с. 50—51]. Таким образом, доказана достаточность в теореме 1.

2. Опишем, как устанавливается тот факт, что если решения $u(t, x)$ задачи (1) — (3), представимые формулой (4), стабилизируются при любой стабилизирующейся граничной функции, то выполнено условие α). Так же, как в [2], с. 152—163, [7] с. 304—309, вначале устанавливается, что нули функции $F(p)$ не могут находиться в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Затем последовательно опровергается возможность появления чисто мнимых нулей, отличных от $p = 0$ и, наконец,

$p=0$. Предполагая наличие таких нулей, всякий раз предъявляется стабилизирующая граничная функция, для которой соответствующее решение не стабилизируется. Этим завершается доказательство теоремы 1.

3. Проиллюстрируем изложенные выше результаты некоторыми примерами.

Пример 1 (задача Дирихле). $B_1(\partial_x) \equiv 1$: $B_1(z) \equiv 1$, таким образом выполнено условие α). Решение задачи Дирихле $u_1(t, x)$, построенное по любой стабилизирующей граничной функции $g_1(t)$, стабилизируется и [9, формула 10.4.82]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t, x) = g_1^0 \int_0^\infty G_0(t, x) dt = g_1^0 \cdot 3 \int_0^\infty A_i(z) dz = g_1^0.$$

Пример 2. $B_2(\partial_x) = \sum_{k=1}^r b_k \partial_x^k$; $B_2(z) = \sum_{k=1}^r b_k z^k$

имеет нуль $z=0$, условие α) не выполнено. Это значит, что есть стабилизирующиеся граничные функции $g_2(t)$, для которых решения $u_2(t, x)$, представимые формулой (4), не стабилизируются. Возникает задача о нахождении дополнительных условий на $g_2(t)$, выполнение которых гарантирует стабилизацию соответствующих им $u_2(t, x)$.

Пример 3. $B_3(\partial_x) \equiv b_2 \partial_x^2 + b_1 \partial_x + b_0$, $b_0 \neq 0$; $B_3(z) = b_2 z^2 + b_1 z + b_0$. Для выполнения условия α) необходимо и достаточно, чтобы нули многочлена $B_3(z)$ лежали в секторе $(-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ комплексной z -плоскости. В частности, при $b_2=0$ это значит, что $b_1 b_0 < 0$. Если же $b_1=0$, то при любых b_2 и b_0 , $b_2 b_0 < 0$ условие α) не выполнено.

1. Тихонов А. Н. О краевых задачах, содержащих производные, превышающие порядок уравнения // Мат. сб., 1950.— 26, № 1.— С. 35—36.
2. Прока Д. В. О стабилизации решения граничной задачи для параболического уравнения // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1973.— 126.— С. 145—170.
3. Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д. О многомерном варианте задачи А. Н. Тихонова // Докл. АН СССР.— 1988.— 299, № 5.— С. 1056—1059.
4. Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д. О стабилизации решений граничных задач для модельного параболического уравнения высокого порядка // Докл. АН УССР.— 1988. Сер. А.— № 1.— С. 18—21.
5. Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д. Стабилизация решений граничных задач для многомерного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 3.— С. 327—334.
6. Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д. Стабилизация решений граничных задач для параболических систем второго порядка // Докл. АН УССР.— 1990.— № 6.— С. 23—28.
7. Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д. Параболические граничные задачи.— Кишинев: Штиинца, 1992.— 328 с.
8. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.— 175 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под редак. М. Абрамовица и И. Стигана.— М.: Наука, 1979.— 830 с.

Международный Соломонов университет, Поступило
Киев 21.10.94
Национальный университет им. Тараса Шевченко,
Киев

The following problem is studied:

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad B(\partial_x)u|_{x=0} = g(t). \quad (1)$$

Necessary and sufficient conditions on the polynomial $B(\lambda)$, which guarantees stabilization of bounded solutions of (1), are found. The solutions are constructed on arbitrary stabilizing functions $g(t)$. Examples, which illustrate the general results, are presented.

УДК 517.923

© 1995

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, Т. А. ПЕТРОВА

ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

(Представлено академиком НАН Украины Ю. А. Митропольским)

В настоящей работе исследуется задача существования ограниченных и периодических решений операторного уравнения Риккати с коэффициентом — неограниченным оператором. Изучению матричного уравнения Риккати посвящено значительное число работ, ряд ссылок содер-

жится в [1]. О связях операторного уравнения Риккати с теорией управления, фильтрации и другими современными приложениями см. работу [2]. Для уравнения Риккати с коэффициентами — ограниченными операторами в [1] доказано существование ограниченных и периодиче-